# Über das sogenannte Dirichlet'sche Princip

Karl Weierstrass

(Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 14. Juli 1870.)

In seinen Vorlesungen über die Krafte, welche nach dem Newton'schen Gesetz wirken, hat sich *Lejeune Dirichlet* zur Begründung eines Hauptsatzes der Potentialtheorie einer eigenthümlichen Schlussweise bedient, welche später auch von anderen Mathematikern, namentlieh von *Riemann*, vielfach angewandt worden ist und den Namen "Dirichlet'sches Princip«erhalten hat.

Über die Zulässigkeit dieses "Princips«haben sich seitdem manche Zweifel geltend gemacht, welche, wie ich im Folgenden zeigen werde, durchaus begründet sind. Ehe ich aber darauf eingehe, will ich, da Dirichlet über den in Rede stehenden Gegenstand nichts veröffentlicht hat, aus einer von Dirichlet im Sommer-Semester 1856 gehaltenen Vorlesung, welche mir in einer von Herrn *Dedekind* angefertigten sorgfältigen Nachschrift vorliegt, die folgende Stelle mittheilen, aus welcher mit voller Bestimmtheit hervorgeht, was Dirichlet gemeint und wie er sein Beweisverfahren zu rechtfertigen versucht hat:

»Ist irgend eine endliche Fläche gegeben, so kann man dieselbe stets, aber nur auf eine Weise, so mit Masse belegen, dass das Potential in jedem Punkte der Fläche einen beliebig vorgesehriebenen (nach der Stetigkeit sich ändernden) Werth hat.«

»Zum Beweise schicken wir den folgenden Satz voraus:«

»Ist irgend ein endlicher zusammenhängender Raum $t$ gegeben, so giebt es stets eine, aber nur eine einzige Function $w$, welche sich nebst ihren ersten Derivirten überall in $t$ stetig ändert, auf der Begrenzung von $t$ überall beliebig vorgeschriebene (stetig veränderliche) Werthe annimmt und innerhalb $t$ überall der Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

Genüge leistet. — Dieser Satz ist eigentlich identisch mit einem anderen aus der Wärmelehre, der dort Jedem unmittelbar evident erscheint, dass nämlich, wenn die Begrenzung von $t$ auf einer überall beliebig vorgeschriebenen Temperatur constant erhalten wird, es stets eine, aber auch nur eine Temperaturvertheilung im Inneren giebt, bei welcher Gleichgewicht stattfindet; oder dass, wie man auch sagen kann, wenn die ursprüngliche Temperatur im Inneren eine beliebige war, diese sich einem Finalzustande nähert, bei welchem Gleichgewicht stattfinden würde.«

»Wir beweisen den Satz, indem wir von einer rein mathematischen Evidenz ausgehen. Es ist in der That einleuchtend, dass unter allen Functionen $u$, welche überall nebst ihren erst en Derivirten sich stetig in $t$ ändem und auf der Begrenzung von $t$ die vorgeschriebenen Werthe annehmen, es eine (oder mehrere) geben muss, für welche das durch den ganzen Raum $t$ ausgedehnte Integral

$$U = \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right\} dt$$

seinen *kleinsten* Werth erhält. Wir wollen eine solche Function gerade mit $u$ und das Minimum des Integrals mit $U$ bezeichnen. Sei nun $u'$ irgend eine andere Function, welche dieselben Grenz- und Stetigkeitsbedingungen wie $u$ erfüllt, und $U'$ der entsprechende Werth des Integrals, so kann $U' - U$ nie negativ sein. Setzen wir nun

$$u + hw = u'$$

wo $h$ einen unbestimmten constanten Factor bezeichnet, so ist $w$ eine Function, welche dieselben Stetigkeitsbedingnngen wie $u$ und $u'$ erfüllt und auf der Begrenzung von $t$ überall gleich Null wird, sonst aber ganz willkürlich ist. Dann findet man leicht

$$U' - U = 2hM + h^2 N,$$

wo

$$M = \int \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} \right\} dt$$

$$N = \int \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\} dt$$

ist. Durch theilweise Integration mit Rücksicht auf die Grenz- und Stetigkeitsbedingungen fuř $w$ und die Stetigkeitsbedingungen für die ersten Derivirten von $u$ findet man leicht

$$M = -\int w \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} dt.$$

Da nun $U' - U$ für jedes auch noch so kleine $h$ niemals negativ sein kann, und $N$ eine endliche positive Grösse ist, so folgt, dass $M$ nothwendig gleich Null ist; und da dies der Fall sein muss, wie auch $w$ beschaffen sein mag, so müssen wir schliessen, dass überall innerhalb $t$ (höchstens mit Ausnahme einzelner Flächen, Linien, Punkte)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

sein muss; denn wäre dies Trinom in einem körperlichen Raume von Null verschieden, so brauchte man nur $w$ überall dasselbe Zeichen wie jenem Trinom zu geben, um einen von Null verschiedenen Werth für $M$ su erhalten.«

»Es giebt also jedenfalls eine solche Function $u$, welche die angegebenen Grenz- und Stetigkeitsbedingungen erfülllt und der partiellen Differentialgleichung genügt. Aber es giebt auch nur *eine* einzige solche Function $u$.

Denn ist $u' = u + w$ irgend eine andere Function, welche dieselben Grenzŋ und Stetigkeitsbedingungen erfüllt, so ist das entsprechende Integral

$$U' = U + \int \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \right\} dt,$$

und folglich ist $U$ wirklich ein *absolutes Minimum*; und sollte etwa $U' = U$ sein, so müsste, wie leicht zu sehen, im ganzen Raume $t$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = 0$$

sein. Daraus würde folgen, dass $w$ constant ist; und da es stetig und auf der Begrenzung von $t$ Null ist, so muss es überall Null sein, d. h. $u'$ muss mit $u$ identisch sein.«

»Es wird später gezeigt werden, dass dieses $u$, welches die Grenz- und Stetigkeitshedingungen erfüllt, und von welchem wir wissen , dass es der partiellen Differentialgleichung höchstens in einzelnen Punkten, Linien oder Flächen innerhalb $t$ widerspricht, *überall*, d. h. in jedem Punkte ihr genügen muss, dass also solche Ausnahmestellen unmöglich sind.«

Unter der Voranssetzung, dass es für den Raum $t$ überhaupt eine den festgesetzten Grenz- und Stetigkeitsbedingungen genügende Function gebe, soll hiernach das im Vorstehenden auseinandergesetzte Dirichlet'sche Verfahren dazu dienen, die Existenz einer Function von $x$, $y$, $z$ nachzuweisen, welche der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

und zugleich den angegebenen Nebenbedingungen genügt. Das letztere ist in jedem bestimmten Falle Ieicht zu beweisen; das andere aber gilt nur in dem Falle, wo sich zeigen lässt, dass es eine Function $u$ giebt, für welche der Werth des Ausdrucks

$$\int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right\} dt,$$

ein (absolutes) Minimum ist. Dieses lässt sich aber aus den von Dirichlet gemachten Voraussetzungen keineswegs folgern, sondern es kann nur behauptet werden, dass es für den in Rede stehenden Ausdruck eine bestimmte *untere Grenze* giebt, welcher er beliebig nahe kommen kann, ohne sie wirklich erreichen zu müssen. Hiernach erweist sich Dirichlet's Schlussweise als hinfällig.

Ich will schliesslich das Vorstehende noch an einem einfachen Beispiel erläutern, durch welches die Unzulässigkeit der Dirichlet'schen Schlussweise evident dargethan wird.

Es bezeiehne nämlich $\varphi(x)$ eine reelle eindeutige Function der reellen Veranderlichen $x$ von der Beschaffenheit, dass erstens $\varphi(x)$ und $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ im Intervall $(-1 \ldots + 1)$ stetige Functionen von $x$ sind, und dass zweitens $\varphi(x)$ an der Grenze $-1$ des Intervalls den vorgeschriebenen Werth $a$, an der Grenze $+1$ den vorgeschriebenen Werth $b$ hat. Dabei sollen die beiden Constanten $a$ und $b$ zwei von einander verschiedene Grössen sein. Wenn nun die Dirichlet'sche Schlussweise zulässig wäre, so müsste sich unter den betrachteten Functionen $\varphi(x)$ eine solche specielle Function befinden, für welche der Werth des Integrals

$$J = \int_{-1}^{+1} \left( x \frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 dx$$

gleich der unteren Grenze aller derjenigen Werthe ist, die dieses Integral für die verschiedenen der betrachteten Gesammtheit angehörenden Functionen $\varphi(x)$ annehmen kann.

Die erwähnte untere Grenze ist aber in dem vorliegenden Falle nothwendig gleich Null. Denn setzt man z. B.

$$\varphi(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{\epsilon}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{\epsilon}},$$

wo $\epsilon$ eine willkürlich anzunehmende *positive* Grösse bezeichnet, so erfüllt diese Function die beiden ersten Bedingungen; und da

$$J < \int_{-1}^{+1} (x^2 + \epsilon^2) \left( \frac{d\varphi(x)}{dx} \right)^2 dx$$

und

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{b-a}{2\mathrm{arctg}\frac{1}{\epsilon}} \cdot \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

so ist für diese specielle Function

$$J < \epsilon \frac{(b-a)^2}{\left(2\mathrm{arctg}\frac{1}{\epsilon}\right)} \int_{-1}^{+1} \frac{\epsilon dx}{x^2 + \epsilon^2}$$

und somit

$$J < \frac{\epsilon}{2} \frac{(b-a)^2}{\left(2\mathrm{arctg}\frac{1}{\epsilon}\right)}$$

Daraus erhellt, da man $\epsilon$ beliebig klein annehmen kann, dass die untere Grenze des Werthes von $J$ gleich Null ist, denn negative Werthe kann $J$ überhaupt nicht annehmen.

Diese Grenze kann aber der Werth von $J$ nicht erreichen, wie man auch den obigen beiden Bedingungen gemäss die Function $\varphi(x)$ wählen möge. Denn da $\varphi(x)$ und $\frac{d\varphi(x)}{dx}$ stetige Functionen von $x$ sein sollen, so ware hierzu erforderlich, dass

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}$$

für jeden dem Intervall $(-1 \ldots +1)$ angehörenden Werth von $x$ verschwinde, dass also $\varphi(x)$ eine Constante sei. Dies ist aber mit der Annahme, dass $a$ und $b$ von einander verschieden sind, unverträglich.

Die Dirichlet'sche Schlussweise führt also in dem betrachteten Falle offenbar zu einem falschcn Resultat.